CAPÍTULO 7

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación, a partir de su definición original, representa o es una suma abreviada. Por ejemplo, $2+2+2+2+2$, se abrevia con 2×5. De tal manera que visto a la inversa, la simbología 3×4 representa la suma $3+3+3+3$.

La simbología anterior puede aplicarse perfectamente a las fracciones. Así, la suma de las fracciones

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

puede abreviarse con la escritura $\frac{2}{3}\times 4$, o bien, puede afirmarse que

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times 4\,.$$

Al realizar la suma

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

se obtiene por resultado $\frac{8}{3}$. Si se escribe la suma anterior con la simbología de la multiplicación, se deduce que $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$, se puede obtener de multiplicar el 2 (numerador original) por el 4, mientras que el 3 (denominador original) resulta de la multiplicación de los denominadores, es decir, por el 3 por el 1. Hay que recordar que el entero 4 tiene denominador 1. En otras palabras,

$$\frac{2}{3}\times 4=\frac{2}{3}\times\frac{4}{1}=\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{\text{numerador por numerador}}{\text{denominador por denominador}}$$

Por extensión o generalización, de allí sale la conocida regla de la multiplicación de fracciones de que *se multiplican numeradores por numeradores y denominadores por denominadores*. Cualquier multiplicación de fracciones hecha así dará un resultado correcto.

Sin embargo, si antes de efectuar la operación de multiplicación de fracciones se simplifican éstas, el proceso resulta menos laborioso y más sencillo. Por esta razón, antes de entrar de lleno a la multiplicación de fracciones algebraicas, se verá la simplificación de fracciones.

SIMPLIFICACIÓN: PROPIEDAD ÚNICA DE LAS FRACCIONES

Las fracciones tienen una sola propiedad: *debe multiplicarse el numerador y el denominador por una misma cantidad para que la fracción no se altere*. En consecuencia, como la división es simplemente la operación inversa de la multiplicación, se puede hacer extensiva la propiedad de las fracciones hacia la división, es decir que debe dividirse el numerador y el denominador entre una misma cantidad para que la fracción no se altere.

Como es la única propiedad que aceptan las fracciones, quiere decir que la única operación que no altera a una fracción es la multiplicación (o su inversa, la división), pero nunca la suma, ni la resta, ni elevando numerador y denominador al cuadrado, etc.

Ejemplo 1: Considérese la fracción $\frac{17}{27}$. Si se suma $+5$ simultáneamente al numerador y al denominador se obtiene la nueva fracción

$$\frac{17 + 5}{27 + 5} = \frac{22}{32} \qquad \text{Falso}$$

Sin embargo, esta última no es igual a la fracción original, es decir que $\frac{17}{27} \neq \frac{22}{32}$ debido a que se utilizó la operación suma $(+5)$ al numerador y denominador simultáneamente, la cual no aceptan las fracciones. Por esta razón, es incorrecto hacer simplificaciones de la siguiente forma:

$$\frac{a + \cancel{b}}{x^2 + \cancel{b}} = \frac{a}{x^2} \qquad \text{Falso}$$

ya que se está restando b al numerador y al denominador al eliminar dicha literal.

Ejemplo 2: Considérese la fracción $\frac{7}{11}$. Si se elevan al cuadrado simultáneamente el numerador y el denominador se obtiene la nueva fracción

$$\frac{7^2}{11^2} = \frac{49}{121} \qquad \text{Falso}$$

Lo cual no es igual a la fracción original, es decir que $\frac{7}{11} \neq \frac{49}{121}$ debido a que se utilizó la operación «elevar al cuadrado» al numerador y denominador simultáneamente, la cual no aceptan las fracciones, porque lo que realmente se hizo fue multiplicar el numerador por 7 mientras que el denominador por 11:

$$\frac{7^2}{11^2} = \frac{7 \times 7}{11 \times 11} = \frac{49}{121} \qquad \text{Falso}$$

Ejemplo 3: Considérese la fracción $\frac{4}{15}$. Si se multiplican simultáneamente el numerador y el denominador por 6, se obtiene la nueva fracción

$$\frac{4 \times 6}{15 \times 6} = \frac{24}{90} \qquad \text{Cierto}$$

En este caso, esta última SÍ es igual a la fracción original, es decir que $\frac{4}{15} = \frac{24}{90}$ debido a que se utilizó la operación multiplicación al numerador y denominador simultáneamente, la cual es la única que aceptan las fracciones.

Ejemplo 4: Considérese la fracción $\frac{24}{90}$. Si se dividen simultáneamente el numerador y el denominador entre 6, se obtiene la nueva fracción

$$\frac{24 \div 6}{90 \div 6} = \frac{4}{15} \qquad \text{Cierto}$$

En este caso, esta última SÍ es igual a la fracción original, es decir que $\frac{24}{90} = \frac{4}{15}$ debido a que se utilizó la operación división (inversa de la multiplicación) al numerador y denominador simultáneamente, la cual es la única que aceptan las fracciones.

Es interesante analizar, por simple que parezca, los ejemplos 3 y 4. Por una parte, el ejemplo 4 no es más que el inverso del ejemplo 3. Por otra, también el ejemplo 4 no es más que una simplificación de una fracción, porque lo que se le hizo, al dividirlo entre 6, fue sacarle sexta al numerador y al denominador.

De tal manera que la simplificación de fracciones no es otra cosa que la aplicación de ésta única propiedad, por lo que simplificar es eliminar los mismos factores del numerador y del denominador al mismo tiempo. Hay que recordar (ver página 82) que factor es el nombre que se le da a toda cantidad, ya sea en Aritmética o en Álgebra, que "esté jugando al deporte" llamado multiplicación.

De todo lo anterior es fácil deducir que para poder simplificar una fracción algebraica, ésta debe factorizarse en su numerador y en su denominador. Al eliminar los mismos factores, tanto del numerador como del denominador, lo que se está haciendo es dividir por la misma cantidad simultáneamente el numerador y el denominador, aplicando así la única propiedad de las fracciones. Por eso resulta grave error la tendencia del estudiante a eliminar cantidades iguales en el numerador y en el denominador, cuando pretende simplificar, cuando éstas se están sumando (o restando), como en el siguiente caso:

$$\frac{2a + b}{b - 5x^2} = \frac{2a + \cancel{b}}{\cancel{b} - 5x^2} = \frac{2a}{-5x^2}$$

¡FALSÍSIMO!

¡Falso!: es que si al numerador $2a + b$ se le quitó la b, lo que realmente se hizo fue restarle b y la operación resta no es propiedad que aceptan las fracciones. Lo mismo sucedió en el denominador. Por eso no se pueden simplificar las fracciones cuando las cantidades a eliminar se están sumando o restando. Debe tenerse mucho cuidado de que la operación principal del numerador y del denominado sea la multiplicación para que la simplificación sea correcta.

Ejemplo 1: Simplificar la fracción $\dfrac{a^2 - 2a - 15}{a^2 - 25}$

Solución:

* Factorizando el numerador $a^2 - 2a - 15$ (trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, ver página 93):

$$a^2 - 2a - 15 = (a - 5)(a + 3).$$

* Factorizando el denominador $a^2 - 25$ (diferencia de cuadrados, página 91):

$$a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5).$$

* Entonces:

$$\frac{a^2 - 2a - 15}{a^2 - 25} = \frac{\cancel{(a-5)}(a+3)}{\cancel{(a-5)}(a+5)}$$

$$\boxed{\frac{a^2 - 2a - 15}{a^2 - 25} = \frac{a+3}{a+5}}$$

Ejemplo 2: Simplificar la fracción $\dfrac{3ac - 12a + 2c - 8}{6a^2 + a - 2}$

Solución: * Factorizando el numerador $3ac - 12a + 2c - 8$ (por agrupación, página 87):

$$\begin{aligned} 3ac - 12a + 2c - 8 &= 3a(c - 4) + 2(c - 4) \\ &= (3a + 2)(c - 4). \end{aligned}$$

* Factorizando el denominador $6a^2 + a - 2$, que es un trinomio explicado en la página 96, se buscan dos números que multiplicados den (- 12) y sumados den (+ 1). Son (+ 4) y (- 3):

$$\begin{aligned} 6a^2 + a - 2 &= 6a^2 + 4a - 3a - 2 \\ &= 2a(3a + 2) - 1(3a + 2) \\ &= (2a - 1)(3a + 2) \end{aligned}$$

$$\frac{3ac - 12a + 2c - 8}{6a^2 + a - 2} = \frac{\cancel{(3a+2)}(c-4)}{(2a-1)\cancel{(3a+2)}}$$

* Entonces:

$$\boxed{\frac{3ac - 12a + 2c - 8}{6a^2 + a - 2} = \frac{c-4}{2a-1}}$$

Ejemplo 3: Simplificar la fracción $\dfrac{2a + 3(a-1)}{(2a+3)(5a-3)}$

Solución: ¡Atención a este ejemplo! El alumno descuidado intentará simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{2a+3(a-1)}{(2a+3)(5a-3)} = \frac{\cancel{2a+3}\,(a-1)}{\cancel{(2a+3)}\,(5a-3)} \qquad \text{Falso}$$

$$= \frac{a-1}{5a-3} \qquad \text{Falso}$$

lo cual es falso, ya que el numerador no está factorizado porque la operación principal es la suma:

La operación principal
es LA SUMA,
por lo tanto NO está factorizada

$$\frac{\overbrace{2a} + \overbrace{3(a-1)}}{\underbrace{(2a+3)}\,\underbrace{(5a-3)}}$$

La operación principal
es LA MULTIPLICACIÓN,
por lo tanto SÍ está factorizada

y se insistió al inicio de este tema en que la única propiedad que aceptan las fracciones es la de multiplicar (o dividir) numerador y denominador por la misma cantidad. Simplificar no es otra cosa que dividir numerador y denominador entre la misma cantidad y al eliminar $2a+3$ en el numerador no se eliminó ningún factor, puesto que $2a+3$ (del numerador) no es un factor.

De manera que lo primero que debe hacerse en este caso es efectuar la multiplicación que está indicada en el numerador, de lo cual resulta

$$\frac{2a+3(a-1)}{(2a+3)(5a-3)} = \frac{2a+3a-3}{(2a+3)(5a-3)}$$

$$= \frac{5a-3}{(2a+3)(5a-3)}$$

Como el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación, cualquier cantidad puede considerarse multiplicada por la unidad, o lo que es lo mismo, factorizada con el factor 1. De esta manera, el numerador $5a - 3 = 1(5a - 3)$.

Y como el denominador ya está factorizado, ahora sí se puede simplificar eliminando el factor $(5a - 3)$ del numerador y del denominador al mismo tiempo, de lo cual se obtiene

$$\frac{5a-3}{(2a+3)(5a-3)} = \frac{1\,\cancel{(5a-3)}}{(2a+3)\,\cancel{(5a-3)}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2a+3}}$$

Otro aspecto interesante de este ejemplo es que cuando aparentemente todo queda simplificado, ya sea en el numerador o en el denominador, en realidad allí queda la unidad por lo que se acaba de afirmar, esto es que como el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación, cualquier cantidad puede considerarse multiplicada por la unidad, o lo que es lo mismo, factorizada con el factor 1. Ese factor 1 es el que queda.

En este ejemplo, cuando aparentemente todo el numerador se eliminó, en el resultado final obsérvese que apareció un 1 en el numerador.

EJERCICIO 7.1

Simplificar las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{15a-21}{30a+48}$

2) $\dfrac{a^4+3a^2}{a^5+3a^4+11a^3}$

3) $\dfrac{6x^2-13x+6}{3x^2-2x^3}$

4) $\dfrac{x+3}{9x+27}$

5) $\dfrac{25a^2-20a+4}{25a^2-4}$

6) $\dfrac{2bc+10c-3b-15}{3b^3+15b^2}$

7) $\dfrac{8+2a}{16-a^2}$

8) $\dfrac{2x+3(x+4)}{(2x+3)(5x+12)}$

9) $\dfrac{(2a-5)4-7a}{(a-20)(4-7a)}$

10) $\dfrac{ab+5(3ab-1)}{(ab+5)(16ab-5)}$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

La regla aritmética de la multiplicación de fracciones es la misma regla algebraica, es decir, *se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador*.

Es preferible simplificar al principio, pero no es indispensable.

Ejemplo 1: Multiplicar las fracciones $\dfrac{a}{2a-1}\cdot\dfrac{5}{a+2}$

Solución:

$$\frac{a}{2a-1}\cdot\frac{5}{a+2}=\frac{a(5)}{(2a-1)(a+2)}$$

$$=\frac{5a}{2a^2+4a-a-2}$$

$$\boxed{\frac{a}{2a-1}\cdot\frac{5}{a+2}=\frac{5a}{2a^2+3a-2}}$$

Ejemplo 2: Multiplicar las fracciones $\dfrac{3m-1}{m}\cdot\dfrac{6m}{2m+3}$

Solución:

$$\frac{3m-1}{m}\cdot\frac{6m}{2m+3}=\frac{(3m-1)(6m)}{m(2m+3)}$$

$$\frac{3m-1}{m}\cdot\frac{6m}{2m+3}=\frac{18m^2-6m}{2m^2+3m}$$

Aunque este resultado es correcto, es decir, no es falso, es conveniente simplificarlo:

$$\frac{18m^2-6m}{2m^2+3m}=\frac{\cancel{m}(18m-6)}{\cancel{m}(2m+3)}$$

o sea que

$$\boxed{\frac{3m-1}{m}\cdot\frac{6m}{2m+3}=\frac{18m-6}{2m+3}}$$

Ejemplo 3: Multiplicar las fracciones $\dfrac{a^2 - b^2}{a + 1} \cdot 3ab$

Solución: En este caso el segundo factor $3ab$ aunque es un entero se considera también fracción al ponerle denominador uno:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 1} \cdot \frac{3ab}{1} = \frac{(a^2 - b^2)(3ab)}{(a + 1)(1)}$$

$$\boxed{\frac{a^2 - b^2}{a + 1} \cdot \frac{3ab}{1} = \frac{3a^3b - 3ab^3}{a + 1}}$$

Ejemplo 4: Multiplicar las fracciones $23\left(\dfrac{5}{7x^4 + x - 11}\right)$

Solución: El entero 23 se considera fracción si se le pone denominador 1:

$$\frac{23}{1}\left(\frac{5}{7x^4 + x - 11}\right) = \frac{23(5)}{1(7x^4 + x - 11)}$$

$$\boxed{\frac{23}{1}\left(\frac{5}{7x^4 + x - 11}\right) = \frac{115}{7x^4 + x - 11}}$$

Ejemplo 5: Multiplicar $2a\left(\dfrac{3b}{x - 2}\right)\left(\dfrac{1}{4x^3}\right)$

Solución:

$$2a\left(\frac{3b}{x - 2}\right)\left(\frac{1}{4x^3}\right) = \left(\frac{2a}{1}\right)\left(\frac{3b}{x - 2}\right)\left(\frac{1}{4x^3}\right)$$

$$= \frac{(2a)(3b)(1)}{(1)(x-2)(4x^3)}$$

$$\boxed{2a\left(\frac{3b}{x-2}\right)\left(\frac{1}{4x^3}\right) = \frac{6ab}{4x^4 - 8x^3}}$$

Ejemplo 6: Multiplicar $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{x+3} \cdot \frac{b-1}{5}$

Solución:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{x+3} \cdot \frac{b-1}{5} = \frac{a(a)(b-1)}{b(x+3)(5)}$$

$$= \frac{a^2(b-1)}{5b(x+3)}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{x+3} \cdot \frac{b-1}{5} = \frac{a^2b - a^2}{5bx + 15b}}$$

EJERCICIO 7.2

Multiplicar las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{15a-21}{30a+48}\times\dfrac{5a+8}{7}$

2) $\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{x^3-2}{5}$

3) $\dfrac{2b-c}{2b+c}\cdot\dfrac{4}{5}$

4) $\dfrac{7}{3x+2y}\cdot\dfrac{x-y}{6}$

5) $\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{6ab-11}{3x-13}$

6) $12\cdot\dfrac{2}{3x-13}$

7) $8\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

8) $4b\left(\dfrac{1-x}{7}\right)$

9) $4\left(\dfrac{3}{x}\right)\left(\dfrac{x^3}{x+3y}\right)$

10) $\left(\dfrac{a-5c}{2}\right)\left(\dfrac{a+5c}{3x-y}\right)\left(\dfrac{8}{3x+y}\right)$